Une question sur les implications (oral 2018)

Je continue à travailler sur la collection 50 QUESTIONS TEST POUR LE CAPES MATHS. La question qui suit, que je viens juste de rédiger, sera sans doute placée dans le tome 4 de la collection. Elle a été posée à l'oral du CAPES 2018, et donne lieu à des commentaires particulièrement foisonnants, ce qui explique sa présence dans les « questions test ».
Au passage, j'ai commencé à travailler en août sur une collection qui s'intéressera aux questions courtes ne nécessitant que peu de commentaires, mais qui permettent d'apprendre à réagir au mieux pendant les entretiens avec le jury. Cette collection s'appelera QUESTIONS COURTES POUR LE CAPES MATHS, et le premier volume devrait paraître avant juin 2019, si tout va bien. Mais pour l'instant, parlons d'implications logiques :

Question 1 *(2018, [2])*
a) Comment définir l'implication $P \Rightarrow Q$ en logique classique ?
b) Si $P \Rightarrow Q$ est vrai, quelle relation existe-t-il entre non P et non Q ?
c) Utiliser cette relation pour expliquer comment on peut prouver qu'un triangle n'est pas rectangle.

Réponse 1 a) L'implication $P \Rightarrow Q$ est une assertion qui peut être vraie ou fausse. Dire qu'elle est vraie permet d'affirmer que si l'assertion P est vraie, alors l'assertion Q l'est aussi. C'est de cette façon qu'on raisonne de façon déductive en mathématiques. En logique formelle, on peut décrire l'implication de façon plus rigoureuse en utilisant des tables de vérité, mais ce n'est pas au programme du secondaire où l'on met pourtant en place les fondements du raisonnement déductif.

b) Si $P \Rightarrow Q$ est vraie, alors l'implication $\neg Q \Rightarrow \neg P$ est vraie. On vient d'écrire la contraposée de l'implication $P \Rightarrow Q$.

c) Le théorème de Pythagore énonce que si un triangle ABC est rectangle en A, alors la relation de Pythagore $BC^2 = BA^2 + AC^2$ est vraie. La contraposée de cette implication permet d'affirmer que si la relation de Pythagore $BC^2 = BA^2 + AC^2$ est fausse, alors le triangle ABC n'est pas rectangle en A. Pour prouver qu'un triangle n'est pas rectangle en A, il suffit donc de prouver que $BC^2 \neq BA^2 + AC^2$.

Commentaires — *α) Dans un premier temps, la réponse à la question a) donnée par le candidat devrait suffire, à l'oral du CAPES. L'implication est un connecteur logique (i.e. un symbole établissant un lien entre deux propositions) qui peut être formalisé de deux façons :*

- On peut considérer que ce symbole fait partie des « règles générales de déduction » permettant de passer d'un système d'axiomes (i.e. de propositions considérées comme vraies a priori dans le cadre d'une théorie) à tous les résultats que l'on peut en déduire (i.e. toutes les propositions qui seront vraies dans cette théorie) en suivant des règles précises (celles du raisonnement déductif).

- On peut se placer dans le cadre de la logique formelle, et considérer l'implication comme un connecteur logique, c'est-à-dire une opération binaire qui à deux propositions P et Q (appelées opérandes) fait correspondre une troisième proposition. On définit ainsi une loi interne dans l'ensemble des propositions. Rappelons qu'en logique, une proposition (on dit encore : assertion, affirmation ou propriété) est un énoncé qui peut être vrai ou faux (dans le cadre d'une théorie définie par des axiomes). Une proposition peut donc prendre deux valeurs de vérité : V (vrai) ou F (faux). Un connecteur logique peut alors être considéré comme une application de $\{V, F\}^2$ dans $\{V, F\}$, que l'on peut représenter à l'aide d'une table de vérité. Voici la table de vérité de l'implication :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Répondre au jury en parlant immédiatement de logique formelle et de tables de vérité est un risque car cela incite le jury à demander de définir ce qu'est une table de vérité, puis de donner la table de vérité correspondant à l'implication. La réponse du candidat, qui préfère se contenter de parler des règles générales de déduction utilisées en mathématiques, est sans doute une bonne stratégie pour éviter un domaine qu'il maîtrise mal, tout en insistant sur la nature de l'implication dans le système déductif.

β) Attention : au niveau des règles générales de déduction, pour montrer qu'une implication $P \Rightarrow Q$ est vraie, on n'a pas à s'inquiéter que l'assertion P soit vraie ou fausse, on doit seulement

supposer que P est vraie et démontrer qu'alors Q est vraie. Quand cela est acquis, un raisonnement constamment utilisé en logique déductive est le modus ponens, qui se décrit par l'implication suivante :

$$\left.\begin{array}{l} P \text{ vraie} \\ P \Rightarrow Q \text{ vraie} \end{array}\right\} \Rightarrow Q \text{ vraie.}$$

Pour montrer qu'une assertion Q est vraie, il suffit donc de démontrer que deux assertions sont vraies, à savoir les assertions P et $P \Rightarrow Q$.

γ) Le candidat répond à la question b) en faisant appel au cours et en rappelant ce que représente la contraposée de l'implication $P \Rightarrow Q$. Cela devrait suffire. Pour aller plus loin, on peut démontrer l'équivalence entre la proposition $P \Rightarrow Q$ et sa contraposée $\neg Q \Rightarrow \neg P$ en utilisant des tables de vérité comme on l'a fait en ([1] § 3.4). Rappelons que l'écriture $\neg P$ se lit non P et représente la négation de la proposition P. Voici deux façons de procéder :

Première méthode – On commence par vérifier que l'équivalence :

$$(P \Rightarrow Q) \;\Leftrightarrow\; (\neg P \text{ ou } Q) \quad (\dagger)$$

est vraie en dessinant les tables de vérité :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

P	Q	$\neg P$	$\neg P$ ou Q
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

On constate que les dernières colonnes de ces tables sont identiques, ce qui prouve que l'affirmation (†) est vraie (on admettra ce point : de façon rigoureuse, cela provient de la définition d'une équivalence par les tables de vérité, et du fait que, si les deux dernières colonnes sont identiques, alors la proposition (†) est une tautologie [1]). On en déduit que :

$$\begin{aligned} (\neg Q \Rightarrow \neg P) &\Leftrightarrow \neg(\neg Q) \text{ ou } \neg P \quad (\text{d'après } (\dagger)) \\ &\Leftrightarrow Q \text{ ou } \neg P \\ &\Leftrightarrow (P \Rightarrow Q) \quad (\text{d'après } (\dagger)). \end{aligned}$$

Seconde méthode – On complète la table de vérité suivante :

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \Rightarrow Q$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

pour constater que les assertions $P \Rightarrow Q$ et $\neg Q \Rightarrow \neg P$ ont même valeur de vérité, comme le montrent les deux dernières colonnes identiques du tableau.

δ) Pour approfondir les notions utilisées ci-dessus, on peut retravailler le cours et retrouver les tables de vérité sur le livre [1] consacré aux raisonnements mathématiques et adapté à la préparation au CAPES.

ε) La question c) permet de préciser la contraposée du théorème de Pythagore et expliquer à quoi elle peut servir : elle peut permettre de prouver qu'un triangle n'est pas rectangle. Le candidat doit savoir énoncer et démontrer le théorème de Pythagore et sa réciproque (des questions pourraient être posées par le jury sur ces points), et bien faire la différence entre ces énoncés. On notera cependant qu'en collège on fait actuellement parfois l'abus de présenter le théorème de Pythagore comme regroupant à la fois le sens direct et le sens réciproque (dans l'acceptation classique).

References

[1] D.-J. Mercier, Dossiers mathématiques n°7, Les raisonnements mathématiques, CSIPP, 2014.

[2] Blog de MégaMaths, Une expérience malchanceuse à l'oral du CAPES maths 2018, 2018
https://megamathsblog.blogspot.com/2018/08/une-experience-malchanceuse-loral-du.html